241 — Suites et séries de fonctions. Exemples et contrexemples.

Soit X un ensemble, E un espace vectoriel normé et $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'applications et $f : X \to E$.

I] Notion de série et convergence de suites et séries

1] Séries et convergence simple pour suites et séries

Définition 1 : On appelle série des fonctions (f_n) la suite $\left(S_n : \begin{array}{l} X \to E \\ x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\end{array}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des n-ièmes sommes partielles, noté $\sum f_n$.
On dit que $\sum f_n$ converge simplement sur X vers S si : $\forall x\in X, \forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N} \mid \forall n\geq N, \|S_n(x)-S(x)\|\leq \varepsilon$. La fonction S est appelée somme de la série $\sum f_n$, noté : $S=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$

Exemple 2 : $\left(f_n : \begin{array}{l}[0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n\end{array}\right)$ converge simplement vers $f : \begin{array}{l}[0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathbb{1}_{\{1\}}(x)\end{array}$.

Exemple 3 : $\left(f_n : \begin{array}{l}\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto xe^{-nx}\end{array}\right)$, $\left(S_n : \begin{array}{l}\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum^{n} xe^{-nx}\end{array}\right)$. On a :
$S_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x}{1-e^{-x}}$ pour $x\neq 0$. Ainsi, $S(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-e^{-x}} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

Théorème 4 : (Critère de Cauchy)
$\sum f_n$ converge simplement sur X ssi $\forall x\in X, \forall\varepsilon>0, \exists N_x\in\mathbb{N} \mid \forall n\geq N, \forall p\in\mathbb{N}$, $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| \leq \varepsilon$

2] Convergence uniforme pour suites et séries

Définition 5 : On dit que $\sum f_n$ converge uniformément vers S sur X si : $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N} \mid \forall n\geq N, \forall x\in X, \|S_n(x)-S(x)\|\leq\varepsilon$

Proposition 6 : (1) Si (f_n) converge uniformément, alors (f_n) converge simplement.
(2) Si $\sum f_n$ converge uniformément, alors $\sum f_n$ converge simplement.

Exemple 7 : Les exemples 2 et 3 ne convergent pas uniformément.

Proposition 8 : (1) (f_n) converge uniformément vers f sur X si $\exists (\varepsilon_n)\in\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} \mid \varepsilon_n \to 0$ tels que $\forall x\in X$, $\|f_n(x)-f(x)\|\leq\varepsilon_n$
(2) (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X si $\exists (x_n)\in X^{\mathbb{N}}$ | $f_n(x_n)-f(x_n) \underset{+\infty}{\not\to} 0$

Exemple 9 : Pour $\left(f_n : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}\end{array}\right)$, (f_n) converge simplement vers 0 mais $f_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{1}{1+\frac{\pi^2}{4}} \underset{+\infty}{\not\to} 0$ donc (f_n) ne converge pas uniformément.

Théorème 10 : (Critère de Cauchy) Si E est complet, alors : (f_n) converge uniformément sur X ssi $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N} \mid \forall n,p\geq N, \forall x\in X$, $\|f_n(x)-f_p(x)\|\leq\varepsilon$

Théorème 11 : Si F est un ev de dim finie et $\emptyset\neq X\subseteq F$, $a\in X$
Alors : si $\forall n\in\mathbb{N}$, f_n est continue en a, et (f_n) converge uniformément vers f alors f est continue en a

Contrexemple 12 : L'hypothèse d'uniforme convergence est vitale
Avec l'exemple 2, les f_n sont continues en 1 mais pas f.

3] Convergence normale pour les séries

Définition 13 : On dit que $\sum f_n$ converge normalement sur X si : $\forall n\in\mathbb{N}$, f_n est bornée et si $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Proposition 14 : $\sum f_n$ converge normalement sur X ssi $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in X$, $\|f_n(x)\|\leq\alpha_n$ et $\sum \alpha_n$ convergente avec $(\alpha_n)\in\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$

Exemple 15 : En reprenant l'exemple 4, la série $\sum xe^{-nx}$ converge normalement sur $[a,+\infty[$ avec $a>0$.

Proposition 16 : Si $\sum f_n$ converge normalement sur X,
Alors : $\sum f_n$ converge normalement sur X et $\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right\|_\infty \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\|f_n\|_\infty$

Contrexemple 17 : Pour $\left(f_n : \begin{array}{l}[0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x\in[0;\frac{1}{n+1}[\,\cup\,[\frac{1}{n};1] \\ \frac{1}{n} & \text{si } x\in[\frac{1}{n+1};\frac{1}{n}[\end{cases}\end{array}\right)$, $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ mais pas normalement

Application 18 : (processus de Galton-Watson) Soit X v.a.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\forall k\in\mathbb{N}$, $p_k=\mathbb{P}(X=k)$, $m=\mathbb{E}[X]=\sum^{+\infty} kp_k<+\infty$, $(X_{i,j})$ famille de v.a. indépendantes suivant la loi $\mathbb{P}_X$ et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $Z_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $Z_{n+1}=\sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n}$, $\pi_n=\mathbb{P}(Z_n=0)$ et $P_{ext}=\mathbb{P}(\exists n\in\mathbb{N} \mid Z_n=0)$
Alors : (1) Si $m>1$, alors P_{ext} est l'unique point fixe de : $G(s) := \mathbb{E}[s^X] = \sum p_k s^k$ sur $]0,1[$
(2) Si $m\leq 1$, alors : $P_{ext}=1$

II] Séries entières et holomorphie

1] Séries entières et rayon de convergence

Soit $(f_n : \mathbb{C}\to\mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$

V.1

Définition 19 : On appelle série entière toute série $\sum f_n$ avec $f_n : \begin{array}{l}\mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto a_n z^n\end{array}$ où $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On appelle somme de la série entière $\sum a_n z^n$: $S : \begin{array}{l}\mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\end{array}$

Proposition 20 : (Lemme d'Abel) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ telle que $(a_n z_0^n)$ est bornée.
Alors : $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $0 \le |z| < |z_0|$, $\sum a_n z^n$ est absolument convergente

Définition 21 : On appelle rayon de convergence de $\sum a_n z^n$:
$R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n) \text{ est bornée}\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

[El Am]

Théorème 22 : (1) Si $|z| < R$, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument
(2) Si $|z| > R$, alors $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement
(3) Si $|z| = R$, alors on ne peut rien dire.

Exemple 23 : (1) $\sum z^n$ de rayon $R=1$, diverge pour tout $|z|=1$.
(2) $\sum \frac{z^n}{n^2}$ de rayon $R=1$, converge pour tout $|z|=1$
(3) $\sum \frac{z^n}{n}$ de rayon $R=1$, diverge pour $z=1$ mais converge pour tout autre $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z|=1$.

Théorème 24 : (1) (règle de D'Alembert) Si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to L \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors $R = \frac{1}{L}$.
(2) (formule d'Hadamard) Si $L = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, alors $R = \frac{1}{L}$

2) Régularité des séries entières

V.4

Théorème 25 : Soit $\sum a_n z^n$ série entière, de somme S et rayon R.
Alors : S est continue sur $D(0;R)$.

Exemple 26 : $\exp : \begin{array}{l}\mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum \frac{z^n}{n!}\end{array}$ est continue sur $\mathbb{C}$

Théorème 27 : Soit $\sum a_n x^n$ série entière à variable réelle de rayon R.
Alors : S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R;R[$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]-R;R[$,
$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$$

[El Am]

Théorème 28 : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert.
Alors : toute fonction holomorphe sur Ω est analytique sur Ω.

Application 29 : Soit $\Gamma : \begin{array}{l}\{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 0\} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt\end{array}$.
Alors : Γ se prolonge de manière unique à $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$.

III) Séries de Fourier

1) Coefficients de Fourier

VI.3 [El Am]

Définition 30 : Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi} \cap \mathcal{C}_m$. On appelle coefficients de Fourier exponentiels : $\left(c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt\right)_{n \in \mathbb{Z}}$, on appelle coefficients de Fourier trigonométriques : $\left(a_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt) dt\right)_{n \in \mathbb{N}}$ $\left(b_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt) dt\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$. On appelle série de Fourier de f : $S(f) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)$.

Proposition 31 : Soit $f \in \mathcal{C}^1_{2\pi} \cap \mathcal{C}^1_m$.
Alors : $f' \in \mathcal{C}_{2\pi} \cap \mathcal{C}_m$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f') = in\, c_n(f)$

Remarque 32 : Si $f \in \mathcal{C}^{k-1}_{2\pi} \cap \mathcal{C}^k_m$, alors $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$

2) Propriétés et premiers résultats

VI.3

Propriétés 33 : Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi} \cap \mathcal{C}_m$, $a \in \mathbb{R}$, $k, n \in \mathbb{Z}$, $g \in \mathcal{C}_{2\pi} \cap \mathcal{C}_m$
Alors : (1) $c_n(\check{f}) = c_{-n}(f)$ avec $\check{f} = f \circ (-id)$
(2) $c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$
(3) $f * g \in \mathcal{C}_{2\pi} \cap \mathcal{C}_m$ et $c_n(f*g) = c_n(f)\, c_n(g)$
(4) $f*g(a) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)\, c_n(g)\, e^{ina}$

VI.4 [El Am]

Théorème 34 : (formule de Parseval) Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi} \cap \mathcal{C}_m$
Alors : $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{4}|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right)$

Lemme 35 : (de Riemann-Lebesgue) Soit $f \in \mathcal{C}_m([a;b])$.
Alors : $\lim_{x \to +\infty} \int_a^b f(t) e^{itx} dt = \lim_{x \to -\infty} \int_a^b f(t) e^{itx} dt = 0$

VI.5

Théorème 36 : (de Dirichlet) Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi} \cap \mathcal{C}^1_m$.
Alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx}$

3) Applications aux EDP et au calcul d'intégrales

[I Sen]

Application 37 : (résolution de l'équation de la chaleur) Soit $u_0 \in L^2([0;2\pi])$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $d_n := c_n(u_0)$ ses coefficients de Fourier.
Alors : $\exists !\, u : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^\infty$ tel que :
(i) $\forall t > 0$, $x \mapsto u(t,x)$ est 2π-périodique
(ii) $\partial_t u$ et $\Delta_x u$ sont bien définies et continues sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$
(iii) $\partial_t u = \Delta_x u$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ (équation de la chaleur)
(iv) $x \mapsto u(t,x)$ converge en norme $L^2([0;2\pi])$ lorsque $t \to 0$

[Les]

Application 38 : Les intégrales de Fresnel $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$ et $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$ convergent et valent $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

VIII.III.1 [ZQ]

IV] Convergence de suites de fonctions dans les espaces de Hölder

1] Espaces intermédiaires à $\mathcal{C}^k$.

Remarque 39 : Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a $\mathcal{C}^{k+1}\subseteq \mathcal{C}^k \subseteq \mathcal{C}^{k-1}$ mais une suite bornée de $\mathcal{C}^k$ n'a pas forcément sa limite dans $\mathcal{C}^k$.

Définition 40 : Soit $\Omega\subseteq\mathbb{R}$ ouvert, $\alpha\in]0;1]$. On définit :

$$\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)=\{f\in L^\infty(\Omega)\mid \exists C>0 \mid \forall x,y\in\Omega, |f(x)-f(y)|\le C|x-y|^\alpha\}$$

et $\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + \sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$

Exemple 41 : $f: \begin{array}{l}]-1;1[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto |x|^\alpha \end{array} \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(]-1;1[)$

Remarque 42 : (1) $\mathcal{C}^1_b(\Omega)\subseteq \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)\subseteq\mathcal{C}^0_b(\Omega)$

(2) Les fonctions de $\mathcal{C}^{0,\alpha}$ sont uniformément continues.

Proposition 43 : (1) $\forall \alpha\ge\alpha'$, $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)\subseteq\mathcal{C}^{0,\alpha'}(\Omega)$ et l'inclusion est continue.

(2) Si Ω est ouvert, borné, $\alpha>\alpha'$, alors l'inclusion $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)\subseteq \mathcal{C}^{0,\alpha'}(\Omega)$ est compacte (l'image d'une boule est relativement compact).

Définition 44 : Soit $\Omega\subseteq\mathbb{R}$ ouvert, $k\in\mathbb{N}$, $\alpha\in]0;1]$. On définit :

$$\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)=\{f\in\mathcal{C}^k_b(\Omega)\mid\forall\beta\le k, f^{(\beta)}\in\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)\}$$

$\|f\|_{k,\alpha}=\sum_{\beta\le k}\|f^{(\beta)}\|_\alpha$ et $\|f\|'_{k,\alpha}=\sum_{\beta<k}\|f^{(\beta)}\|_\infty+\|f^{(k)}\|_\alpha$

Théorème 41 : (1) Soit $k+\alpha>k'+\alpha'$, alors $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)\subseteq\mathcal{C}^{k',\alpha'}(\Omega)$ et l'inclusion est continue.

(2) Si Ω est ouvert, borné, alors l'injection $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)\hookrightarrow\mathcal{C}^{k',\alpha'}(\Omega)$ est compacte

(3) Si Ω est compact, borné, alors $\forall\varepsilon>0,\exists C_\varepsilon>0\mid$
$\|f\|_{k',\alpha'}\le\varepsilon\|f\|_{k,\alpha}+C_\varepsilon\|f\|_\infty$

(4) $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$ est une algèbre multiplicative i.e. si $u,v\in\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$ alors : $uv\in\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$ et $\|uv\|_{k,\alpha}\le C\|u\|_{k,\alpha}\|v\|_{k,\alpha}$

VIII.III.4 [ZQ]

2] Application à la résolution d'EDO.

Théorème 42 : (principe du maximum faible)(admis)

Soit $]a;b[\subseteq\mathbb{R}$, $L=A\frac{d^2}{dx^2}+B\frac{d}{dx}+C$ avec $A,B,C:]a;b[\to\mathbb{R}$ bornés tels que $\forall x\in]a;b[, A(x)>0$ et $C(x)\le 0$. Soit $u\in\mathcal{C}([a;b])\cap\mathcal{C}^2(]a;b[)$ tel que $L(u)\ge0$.

Alors : $\sup_{x\in]a;b[}u(x)\le\sup_{x\in\{a;b\}}\{\sup\{u(x);0\}\}$

Théorème 43 : Soit $\alpha\in]0;1]$, $a,b\in\mathbb{R}$, $q\in\mathcal{C}^{0,\alpha}(]a;b[)$ avec $q\ge0$.

Alors : $\forall f\in\mathcal{C}^{0,\alpha}(]a;b[)$, (E) : $\begin{cases}-u''+qu=f \text{ sur }]a;b[\\ u(a)=u(b)=0\end{cases}$ admet une unique solution $u\in\mathcal{C}^{2,\alpha}(]a;b[)$.

Références :

[ElAm] Suites et séries numériques/de fonctions - El Amrani
[NR] No Reference ¨^
[Iseu] L'oral à l'agrégation de mathématiques - Isenmann
[Les] 131 développements pour l'oral - Lesesvre
[ZQ] Analyse pour l'agrégation - Zuily